Centralna Komisja Egzaminacyjna

WPISUJE ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę z kodem

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

MAJ 2011

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 20 stron (zadania 1–33). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–23) przenieś na kartę odpowiedzi, zaznaczając je w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (24–33) może spowodować, że za to rozwiązanie nie będziesz mógł dostać pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj <u>tylko długopisu lub pióra</u> z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

Czas pracy: 170 minut

Liczba punktów do uzyskania: 50

MMA-P1_1P-112

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach od 1. do 23. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. *(1 pkt)*
Wskaż nierówność, którą spełnia liczba π.

A. $|x+1|>5$ **B.** $|x-1|<2$ **C.** $\left|x+\frac{2}{3}\right|\le 4$ **D.** $\left|x-\frac{1}{3}\right|\ge 3$

Zadanie 2. *(1 pkt)*
Pierwsza rata, która stanowi 9% ceny roweru, jest równa 189 zł. Rower kosztuje

A. 1701 zł. **B.** 2100 zł. **C.** 1890 zł. **D.** 2091 zł.

Zadanie 3. *(1 pkt)*
Wyrażenie $5a^2-10ab+15a$ jest równe iloczynowi

A. $5a^2(1-10b+3)$ **B.** $5a(a-2b+3)$ **C.** $5a(a-10b+15)$ **D.** $5(a-2b+3)$

Zadanie 4. *(1 pkt)*
Układ równań $\begin{cases}4x+2y=10\\6x+ay=15\end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli

A. $a=-1$ **B.** $a=0$ **C.** $a=2$ **D.** $a=3$

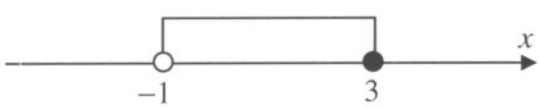
Zadanie 5. *(1 pkt)*
Rozwiązanie równania $x(x+3)-49=x(x-4)$ należy do przedziału

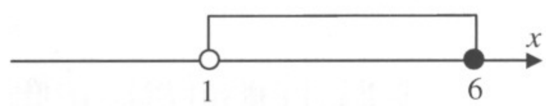
A. $(-\infty,3)$ **B.** $(10,+\infty)$ **C.** $(-5,-1)$ **D.** $(2,+\infty)$

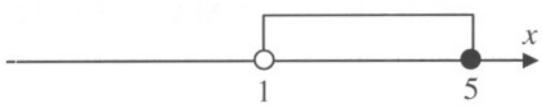
Zadanie 6. *(1 pkt)*
Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8}+\frac{x}{6}<\frac{5x}{12}$ jest

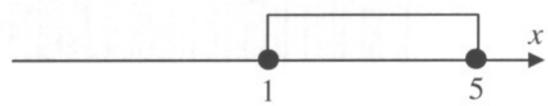
A. 1 **B.** 2 **C.** -1 **D.** -2

Zadanie 7. *(1 pkt)*
Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5)\le 0$ i $x>1$.

A.


B.


C.


D.


BRUDNOPIS

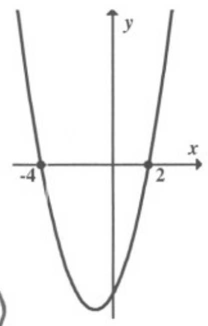
Zadanie 8. *(1 pkt)*

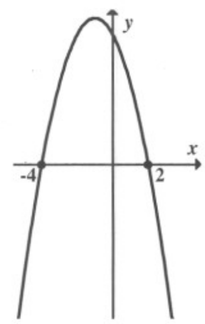
Wyrażenie $\log_4(2x-1)$ jest określone dla wszystkich liczb x spełniających warunek

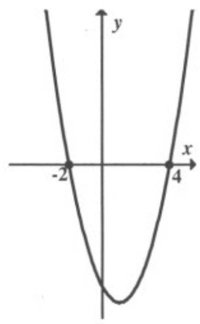
A. $x \le \frac{1}{2}$ **B.** $x > \frac{1}{2}$ **C.** $x \le 0$ **D.** $x > 0$

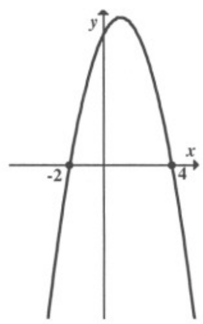
Zadanie 9. *(1 pkt)*

Dane są funkcje liniowe $f(x) = x - 2$ oraz $g(x) = x + 4$ określone dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Wskaż, który z poniższych wykresów jest wykresem funkcji $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

A.


B.


C.


D.


Zadanie 10 *(1 pkt)*

Funkcja liniowa określona jest wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + 4$. Miejscem zerowym tej funkcji jest liczba

A. $-2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 11. *(1 pkt)*

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_3 = 1$ i $a_4 = \frac{2}{3}$. Wtedy

A. $a_1 = \frac{2}{3}$ **B.** $a_1 = \frac{4}{9}$ **C.** $a_1 = \frac{3}{2}$ **D.** $a_1 = \frac{9}{4}$

Zadanie 12. *(1 pkt)*

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) o wyrazach dodatnich. Wtedy

A. $a_4 + a_7 = a_{10}$ **B.** $a_4 + a_6 = a_3 + a_8$ **C.** $a_2 + a_9 = a_3 + a_8$ **D.** $a_5 + a_7 = 2a_8$

Zadanie 13. *(1 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Wtedy

A. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$

C. $\sin\alpha = \frac{12}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{5}{12}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{13}$

BRUDNOPIS

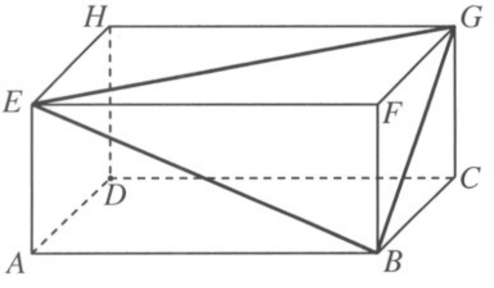
Zadanie 14. *(1 pkt)*

Wartość wyrażenia $\dfrac{\sin^2 38^\circ + \cos^2 38^\circ - 1}{\sin^2 52^\circ + \cos^2 52^\circ + 1}$ jest równa

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 0 **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** 1

Zadanie 15. *(1 pkt)*

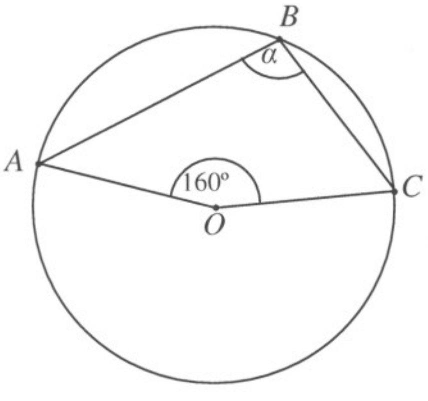
W prostopadłościanie *ABCDEFGH* mamy: $|AB| = 5$, $|AD| = 4$, $|AE| = 3$. Który z odcinków *AB*, *BG*, *GE*, *EB* jest najdłuższy?



A. *AB* **B.** *BG* **C.** *GE* **D.** *EB*

Zadanie 16. *(1 pkt)*

Punkt *O* jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. 80° **B.** 100° **C.** 110° **D.** 120°

Zadanie 17. *(1 pkt)*

Wysokość rombu o boku długości 6 i kącie ostrym 60° jest równa

A. $3\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** $6\sqrt{3}$ **D.** 6

Zadanie 18. *(1 pkt)*

Prosta k ma równanie $y = 2x - 3$. Wskaż równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt D o współrzędnych $(-2, 1)$.

A. $y = -2x + 3$ **B.** $y = 2x + 1$ **C.** $y = 2x + 5$ **D.** $y = -x + 1$

BRUDNOPIS

Zadanie 19. *(1 pkt)*

Styczną do okręgu $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu

A. $x = 1$ **B.** $x = 3$ **C.** $y = 0$ **D.** $y = 4$

Zadanie 20. *(1 pkt)*

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe 54. Długość przekątnej tego sześcianu jest równa

A. $\sqrt{6}$ **B.** 3 **C.** 9 **D.** $3\sqrt{3}$

Zadanie 21. *(1 pkt)*

Objętość stożka o wysokości 8 i średnicy podstawy 12 jest równa

A. 124π **B.** 96π **C.** 64π **D.** 32π

Zadanie 22. *(1 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej trzy wynosi

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Zadanie 23. *(1 pkt)*

Uczniowie pewnej klasy zostali poproszeni o odpowiedź na pytanie: „Ile osób liczy twoja rodzina?" Wyniki przedstawiono w tabeli:

Liczba osób w rodzinie	liczba uczniów
3	6
4	12
x	2

Średnia liczba osób w rodzinie dla uczniów tej klasy jest równa 4. Wtedy liczba x jest równa

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 7

BRUDNOPIS

ZADANIA OTWARTE

Rozwiązania zadań o numerach od 24. do 33. należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 24. *(2 pkt)*

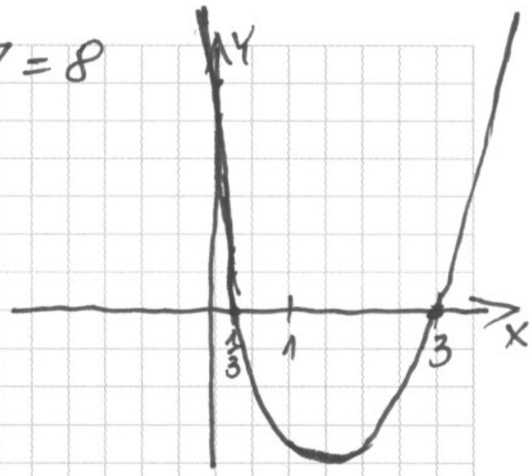
Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 64$ $\sqrt{\Delta} = 8$

$x_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{10+8}{6} = 3$

$x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$



Odpowiedź: $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3 \right\rangle$

Zadanie 25. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

Ponieważ $a+b=1$, więc $(a+b)^2=1$

czyli $a^2+2ab+b^2=1$.

Ponieważ $a^2+b^2=7$, więc $2ab+7=1$.

Stąd mamy, że $ab=-3$ i $a^2b^2=(ab)^2=9$.

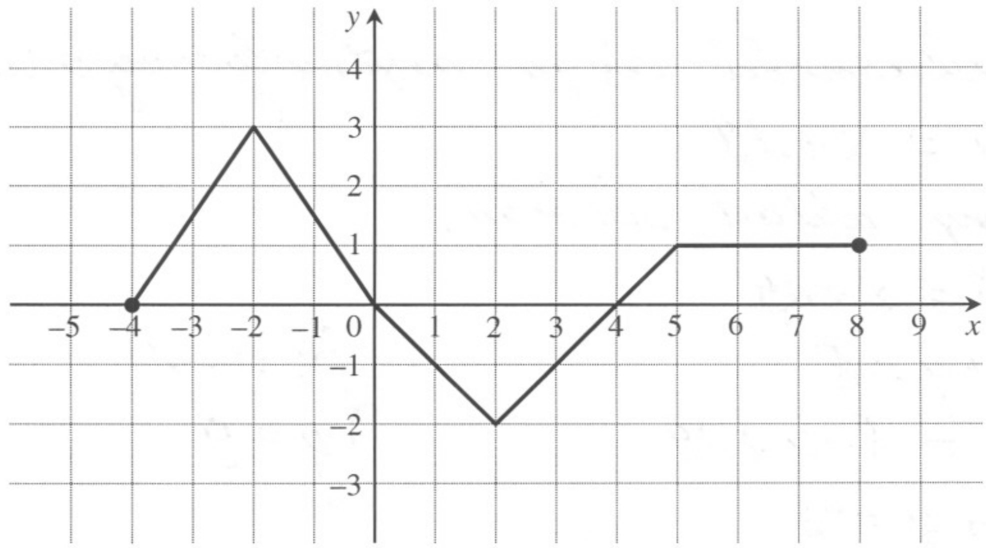
Ze wzorów skróconego mnożenia mamy

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=7^2-2\cdot 9=31$

cnd.

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

a) zbiór wartości funkcji *f*,
b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja *f* jest malejąca.

a) Zbiór wartości: $\langle -2, 3 \rangle$

b) Maksymalny przedział w którym funkcja jest malejąca: $\langle -2, 2 \rangle$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	24.	25.	26.
	Maks. liczba pkt	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Liczby x, y, 19 w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x + y = 8$. Oblicz x i y.

Z własności ciągu arytmetycznego mamy:

$2y = x + 19$

Mamy układ równań:

$$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 8 - y + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 27 \quad /:3 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Odpowiedź: $x = -1$, $y = 9$

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

$$\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2 \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2$$

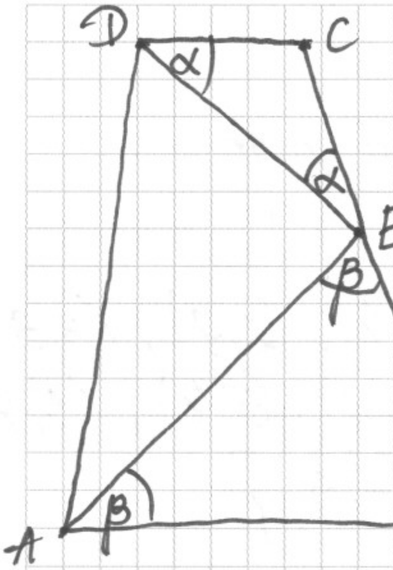
Stąd

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Odpowiedź: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}$

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.



Założenie: $ABCD$ – trapez

$|CE| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$

Teza: $|\sphericalangle AED| = 90^\circ$

Dowód:

Oznaczmy $|\sphericalangle CED| = \alpha$

$|\sphericalangle AEB| = \beta$

ΔDCE i ΔABE są równoramienne, więc

$|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$

oraz $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEB| = \beta$

Ponieważ $ABCD$ jest trapezem, więc

$|\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle ABE| = 180^\circ$

Ale $|\sphericalangle DCE| = 180^\circ - 2\alpha$ i $|\sphericalangle ABE| = 180^\circ - 2\beta$

zatem

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Wynika stąd, że

$$|\sphericalangle AED| = 180^\circ - (|\sphericalangle AEB| + |\sphericalangle CED|) =$$
$$= 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$$

Odpowiedź: ....

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	27.	28.	29.
	Maks. liczba pkt	2	2	2
	Uzyskana liczba pkt			

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb {1, 2, 3,..., 7} losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

$|\Omega| = 7^2 = 49$

A – suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3

$A = \{(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (2,7), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (5,7), (6,3), (6,6), (7,2), (7,5)\}$

$|A| = 16$

$P(A) = \frac{16}{49}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3 jest równe $\frac{16}{49}$

Zadanie 31. *(4 pkt)*
Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

Współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej $y=2x-3$ jest równy $m=-\frac{1}{2}$.
Zatem równanie prostej prostopadłej do stycznej przechodzącej przez $S=(3,7)$:

$$y=-\frac{1}{2}x+b$$

$$7=-\frac{1}{2}\cdot 3+b \Rightarrow b=\frac{17}{2}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}$$

Zapiszmy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}=2x-3$$

$$\begin{cases} x=\frac{23}{5} \\ y=\frac{31}{5} \end{cases}$$

Odpowiedź: $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	30.	31.
	Maks. liczba pkt	2	4
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 32. *(5 pkt)*
Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

x – liczba dni

y – liczba kilometrów przebytych każdego dnia

$$\cancel{x+y=} \begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3)(y-12) = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{112}{x} \\ (x+3)\left(\frac{112}{x} - 12\right) = 112 \;\Big|\cdot x \end{cases} \quad \text{bo } x>0$$

$$\begin{cases} y = \frac{112}{x} \\ \cancel{112x} - 12x^2 + 336 - 36x - \cancel{112x} = 0 \;\Big|:12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{112}{x} \\ x^2 + 3x - 28 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 9 + 112 = 121 \qquad \sqrt{\Delta} = 11$

$x_1 = \frac{-3-11}{2} < 0$ sprzeczne bo $x>0$

$x_2 = \frac{-3+11}{2} = 4$

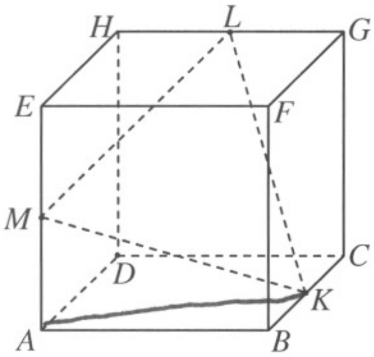
$$\begin{cases} y = 28 \\ x = 4 \end{cases}$$

Odpowiedź: Turysta przechodził dziennie 28 km.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	32.
	Maks. liczba pkt	5
	Uzyskana liczba pkt	

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Punkty K, L i M są środkami krawędzi BC, GH i AE sześcianu $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta KLM.



ΔABK jest prostokątny, więc

$|AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2$

zatem $|AK|^2 = \frac{5}{4}$

ΔMAK jest prostokątny, więc

$|MK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$

stąd $|MK|^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

ΔMKL jest trójkątem równobocznym

zatem

$P = \frac{|MK|^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pole trójkąta KLM jest równe $\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Wypełnia egzaminator	Nr zadania	33.
	Maks. liczba pkt	4
	Uzyskana liczba pkt	

BRUDNOPIS