

Egzamin maturalny 2013 matematyka poziom rozszerzony – przykładowe odpowiedzi:

Zad. 1

$$\text{odp. } x \in (-\infty; -7) \cup \left\langle -1; \frac{11}{3} \right\rangle$$

Rozwiązujemy nierówność w przedziałach $(-\infty; -4)$, $\left\langle -4; \frac{5}{2} \right\rangle$, $\left\langle \frac{5}{2}; +\infty \right\rangle$

Zad. 2

dowód: jeżeli poprowadzimy z punktu C wysokość trapezu CG (G leży na podstawie AB) to

$$|GB| = \frac{|AB| - |CD|}{2}$$

Ponieważ sumy boków przeciwległych muszą być równe, to $|CB| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$

Z twierdzenia Pitagorasa w $\triangle CGB$ jest $4r^2 + \left(\frac{|AB| - |CD|}{2}\right)^2 = \left(\frac{|AB| + |CD|}{2}\right)^2$

Po wykonaniu działań i uproszczeniach otrzymujemy tezę.

Egzamin maturalny 2013 matematyka poziom rozszerzony – przykładowe odpowiedzi (c.d.):

Zad. 3

odp. 1920

cyfra 0 na trzech miejscach - $\binom{5}{3} = 10$ możliwości, cyfra 5 - 3 możliwości, pozostałe 8 cyfr na 2 pozostałych miejscach - 8^2 możliwości. Razem $3 \cdot 10 \cdot 8^2 = 1920$ możliwości

Zad. 4

odp. 90° , 120° , 240° , 270°

Ze wzoru $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ jest po przekształceniach $\cos x(2\cos x + 1) = 0$, czyli $\cos x = 0$ lub

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

Zad. 5

odp. (9, 11, 13) lub (33, 11, -11)

Należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} c - b = b - a \\ a + b + c = 33 \\ \frac{c + 19}{b + 5} = \frac{b + 5}{a - 1} \end{cases}$$

Egzamin maturalny 2013 matematyka poziom rozszerzony – przykładowe odpowiedzi (c.d.):

Zad. 6

odp. $0 \leq m \leq 3 - \sqrt{7}$

Z warunków: $\Delta > 0$ $m < 1$ i $x_1 x_2 \leq 6m$ (wzór Viete'a)

$x_1^2 + x_2^2 \geq 6m$ (wzory Viete'a) jest $m \leq 3 - \sqrt{7}$

Zad. 7

odp. $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$

Odległość środka okręgu od prostej wynosi 15, połowa odcinka AB wynosi 20.

r^2 wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa.

Zad. 8

odp. $m = 6$, pierwiastki: $-2, \frac{1}{4}, 3$

Z informacji o reszcie wyniku $W(-1) = 20$, stąd wartość $m = 6$

Wielomian ma postać $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + 6$, jednym z pierwiastków jest -2 (podzielnik wyrazu wolnego).

Z podzielenia $W(x)$ przez $x + 2$ otrzymujemy trójmian $4x^2 - 13x + 3$, który ma pierwiastki $\frac{1}{4}$ i 3 .

Egzamin maturalny 2013 matematyka poziom rozszerzony – przykładowe odpowiedzi (c.d.):

Zad. 9

odp. $P_{\Delta} = 84$

Ozn. $AD = 3x$, $DB = 4x$

Z twierdzenia cosinusów dla ΔABC i ΔADC po wyeliminowaniu $\cos \sphericalangle CAB$ mamy $x = 3$ -
podstawa ΔABC wynosi $7x = 21$.

Wysokość h z twierdzenia Pitagorasa w ΔDBC wynosi 8. Pole = $\frac{1}{2} \cdot 7x \cdot h$.

Zad. 10

odp. $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$

ΔBCS jest równoramienny, na jego wysokości SD (trzeba zrobić rysunek) leży punkt E odległy od A o d .

Z twierdzenia Pitagorasa w ΔAES jest $|SE| = \sqrt{H^2 - d^2}$ (H – wysokość ostrosłupa).

$\Delta AES \sphericalangle \Delta ADE$ - stąd $\frac{\sqrt{H^2 - d^2}}{H} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot H$

Egzamin maturalny 2013 matematyka poziom rozszerzony – przykładowe odpowiedzi (c.d.):

Zad. 11

odp. $\frac{5}{108}$

$$|\Omega| = 6^4 = 1296$$

Ponieważ $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, więc iloczyn 60 może być przy następujących wynikach rzutów:

$$(2, 2, 3, 5) - \frac{4!}{2} = 12 \text{ możliwości (obie dwójki są równoważne), lub}$$

$$(1, 2, 5, 6) - 4! = 24 \text{ możliwości, lub}$$

$$(1, 3, 4, 5) - 4! = 24 \text{ możliwości.}$$

Razem jest $12 + 24 + 24 = 60$ możliwości, więc $|A| = 60$

Zad. 12

odp. a) $p = -4$

Z wykresu $f(0) = 2$ czyli $\log_2(-p) = 2$ czyli $-p = 2^2$

b) część wykresu "nad osią OX" pozostaje bez zmian, część "pod osią OX" przekształcić przez symetrię osiąwą OX

c) $m > 2$

Prosta $y = m$ musi przecinać wykres $|f(x)|$ w dwu punktach leżących w I i II ćwiartce.